C | A | U Christian-Albrechts-Universität zu Kiel | Technische Fakultät

Deckblatt zu einer Klausur am Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik

Modulprüfung	
Modulname	**Grundgebiete der Elektrotechnik II**
Datum	**07.03.2017**
Prüfpersonen	
1. Prüfperson	**Prof. Dr. Martina Gerken**
ggf. 2. Prüfperson	
Kandidat/in	
Matrikelnummer	
Name, Vorname	
Vorleistung **vor** SS 2016 berücksicl	Vein

Erklärung der/des Kandidatin/Kan

Musterlösung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur F s ich prüfungsfähig bin.

Ich nehme zur Kenntnis, dass der T : ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfu :. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültig er Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAL ı gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird me

Unterschrift: ____________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte	18	17	18	21	17	9	100
erreicht							

Übungen (Gewicht 25%)	Klausur (Gewicht 75%)	Gesamt %	Modulnote

Einsicht / Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Note einverstanden bin. Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

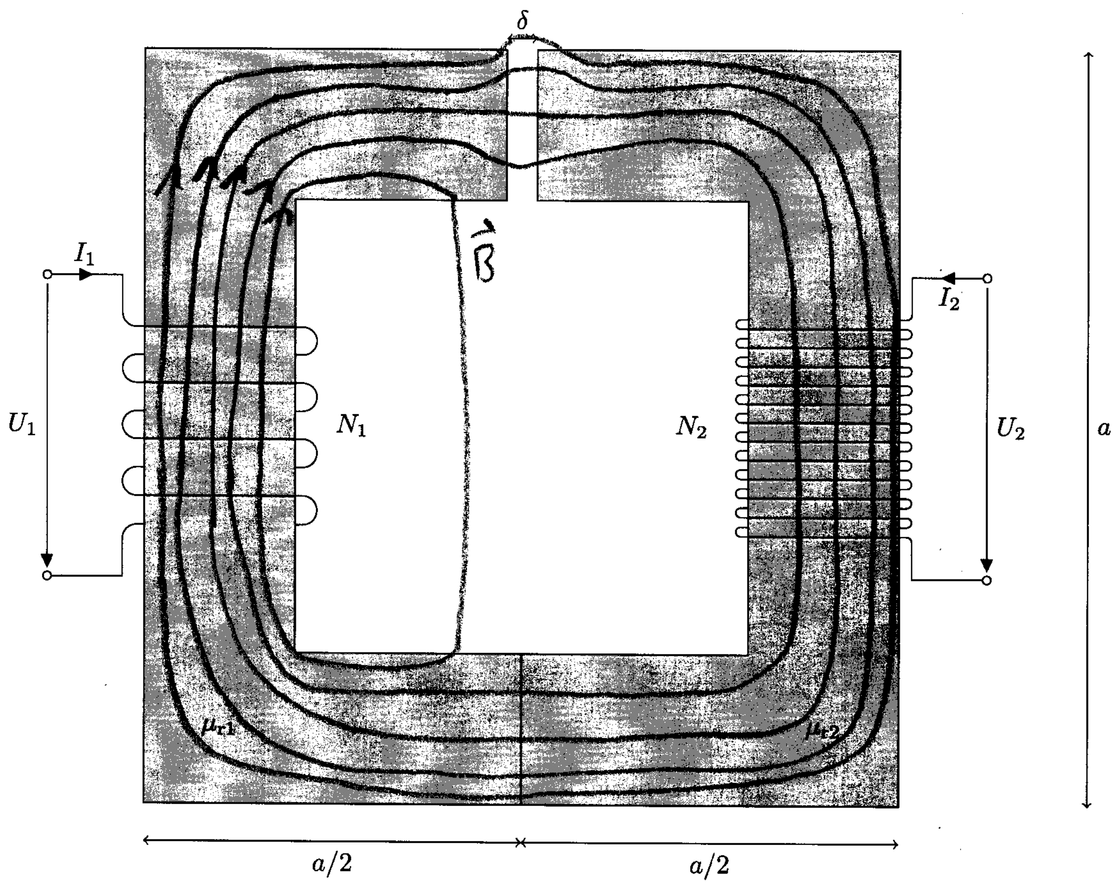
Kiel, den ____________________ Unterschrift: ____________________

Name:	Vorname:

Aufgabe 1: Magnetischer Kreis (18 Punkte)

Gegeben ist der abgebildete magnetische Kreis, der aus zwei U-Kernen aus Ferritmaterial mit quadratischem Querschnitt (Querschnittsfläche $A_{\mathrm{Kern}} = 16\,\mathrm{cm}^2$) zusammengesetzt ist. Die U-Kerne sollen so zugeschnitten werden, dass im oberen Schenkel ein Luftspalt der Länge δ verbleibt. Die Windungszahlen betragen $N_1 = 40$ (links) und $N_2 = 4000$ (rechts). Die Außenkanten des magnetischen Kreises haben die Länge $a = 20\,\mathrm{cm}$. Die Permeabilität der beiden Ferritkerne beträgt $\mu_{\mathrm{r1}} = \mu_{\mathrm{r2}} = 10\,000$.

(a) Skizzieren Sie qualitativ, aber physikalisch realistisch, die Feldlinien das magnetischen Feldes $\vec{B}$ für den Fall $I_1 > 0$ A, $I_2 = 0$ A in die Zeichnung ein. Skizzieren Sie mindestens fünf Feldlinien!



(b) Zur einfachen Berechnung des Magnetfeldes müssen einige Effekte vernachlässigt werden. Welche Näherungen müssen Sie annehmen, um den magnetischen Kreis rechnerisch analysieren zu können? Nennen Sie mindestens zwei!

- Kein Streufluss
- keine Luftspaltaufweitung (Alternativ: z.B. $B_L = 0{,}5\, B_{Fe}$ ansehen)
- Effekte in den Ecken vernachlässigen
- nur Feld entlang der mittleren Weglänge berechnen / homogenes Feld annehmen

Name:	Vorname:

(c) Der Luftspalt soll dazu dienen, die Feldstärke im Kern zu begrenzen. Stellen Sie die Luftspaltlänge δ so ein, dass bei $I_1 = I_{1\max} = 100$ A, $I_2 = 0$ A im Kern eine maximale Feldstärke von $B = B_{\max} = 1$ T nicht überschritten wird! Geben Sie δ als Zahlenwert an!

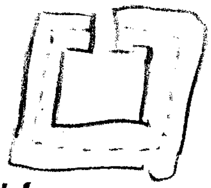
Annahme: kein Streufluss, homogenes Feld

aus $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ folgt $B = 1T$ überall im Kern

Durchflutung $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = N_1 I_1$

$$\| $$

$$H_{Fe} \cdot l_{Fe} + H_L \cdot l_L$$



$\vdash b = 4cm$

$b/2$

mittlere Eisenweglänge: $l_{Fe} = 4a - 4b - \delta$

$l_L = \delta$

[Alternativ: $l_{Fe} \approx 4(a-b) = 64cm$]

$$H_{Fe} = \frac{1}{\mu_0 \mu_{r1}} B_{Fe} \quad (B_{Fe} = B_{max})$$

$$H_L = \frac{1}{\mu_0} B_L \quad (B_L = B_{max}) \quad \Rightarrow N_1 I_1 = \left[4(a-b) - \delta\right] \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B_{max} + \delta \frac{1}{\mu_0} B_{max}$$

$$\Leftrightarrow N_1 I_1 = 4(a-b) \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B_{max} + \delta \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_0 \mu_r}\right) B_{max}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\frac{N_1 I_1}{B_{max}} - 4(a-b)\frac{1}{\mu_0 \mu_r}}{\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_0 \mu_r}} = 4{,}96\,mm$$

(d) Berechnen Sie die Selbstinduktivität der Windung 1 und die Gegeninduktivität zwischen beiden Windungen!
(Falls Sie in (c) kein Ergebnis ermitteln konnten, nehmen Sie bitte $\delta = 3$ mm an.)

$$L_1 = \frac{\Psi_1}{I_1} = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} = \frac{N_1 B_{max} A_{Kern}}{I_{max}} = 640\,\mu H$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\Psi_2}{I_1} = \frac{N_2 \Phi}{I_1} = 64\,mH$$

Name:	Vorname:

(e) Durch eine Verwechslung in der Produktion wird ein rechter U-Kern mit $\mu_{r2} = 20\,000$ eingesetzt. Welche Auswirkung hat dies auf die maximale Feldstärke B_{max} (weiterhin für $I_1 = 100$ A)? Sind die Auswirkungen groß oder klein? Argumentieren Sie! (neue Rechnungen sind nicht zwingend erforderlich)

μ_{r2} größer → magnetischer Widerstand R_m kleiner → mehr Fluss bei gleicher Durchflutung → B steigt

$\mu_{r,Fe} = 10.000$ $\mu_{r,Luft} = 1$

$l_{Fe} = 64$ cm $l_{Luft} = 0{,}5$ cm

mag. Widerstand des Luftspalts dominiert

→ Erhöhung von B wird klein sein

Name:	Vorname:

Aufgabe 2: Induktion (17 Punkte)

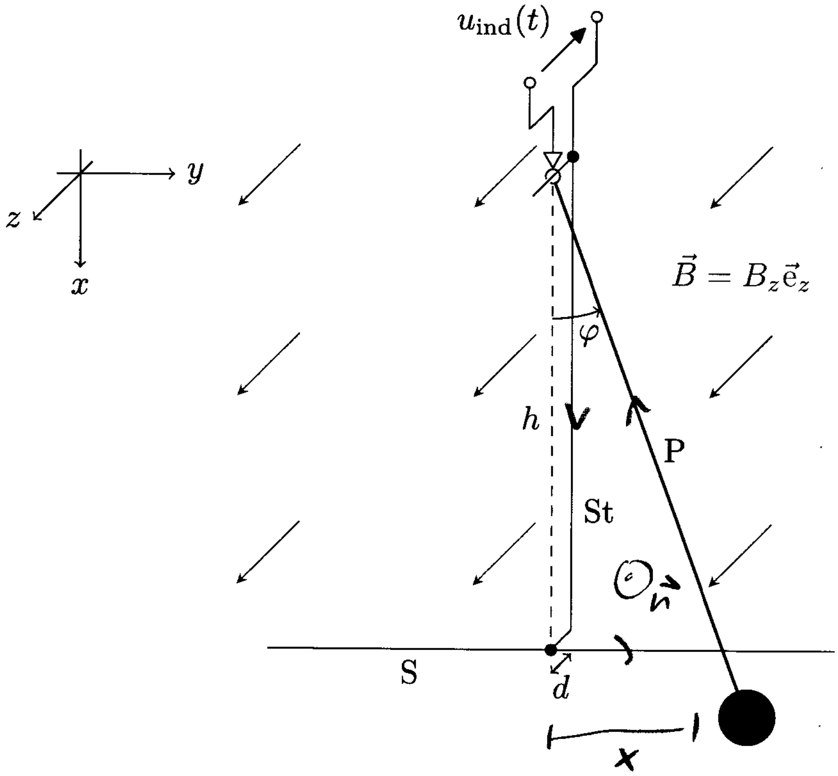
Ein Pendel mit einem leitfähigen Pendelstab P schwingt periodisch hin und her und gleitet dabei reibungsfrei an einer leitfähigen Stromschiene S entlang. Die Pendelbewegung wird durch den Auslenkwinkel $\varphi(t)$ beschrieben:

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\cos(\omega t)$$

(Nehmen Sie $\hat{\varphi}$ als „relativ klein“, also $\hat{\varphi} < 30°$, an.)
Der Abstand zwischen Pendelaufhängung und Stromschiene wird mit h bezeichnet. Das Stativ St ist ebenfalls leitfähig und mit der Stromschiene verbunden. Das Pendel selbst ist elektrisch isoliert am Stativkopf aufgehängt. Der Abstand d sei so klein, dass die z-Ausdehnung der Anordnung vernachlässigt werden kann. Der ganze Aufbau ist von dem homogenen, konstanten Magnetfeld

$$\vec{B} = B_z\,\vec{e}_z$$

durchsetzt. Zwischen Pendelaufhängung und Stativkopf wird die induzierte Spannung $u_{\text{ind}}(t)$ gemessen.



(a) Berechnen Sie die Spannung $u_{\text{ind}}(t)$!

$$U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Orientierung der Fläche zur Spannung im Rechtsschraubensinn;

$\hat{n} = \vec{e}_t$

Name:	Vorname:

$$\vec{A}(t) = \frac{1}{2} h x \, \vec{e}_z = \frac{1}{2} h^2 \tan \varphi(t) \, \vec{e}_z$$

$$= \frac{1}{2} h^2 \tan[\hat{\varphi} \cos \omega t] \, \vec{e}_z$$

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} B_z h^2 \tan[\hat{\varphi} \cos \omega t]$$

$$U_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

NR: $\tan = \frac{\sin}{\cos}$

$$\Rightarrow \tan' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

$$U_{ind} = - \frac{1}{2} B_z h^2 (-\hat{\varphi} \omega \sin \omega t) \cdot \frac{1}{\cos^2[\hat{\varphi} \cos \omega t]}$$

$$= \frac{1}{2} B_z h^2 \hat{\varphi} \omega \frac{\sin \omega t}{\cos^2[\hat{\varphi} \cos \omega t]}$$

Alternative: Kleinwinkelnäherung $\tan \varphi \approx \varphi$ für kleine Winkel

$$\Rightarrow \vec{A}(t) \approx \frac{1}{2} h^2 \varphi(t) \, \vec{e}_z = \frac{1}{2} h^2 \hat{\varphi} \cos \omega t \, \vec{e}_z$$

~~(b) Geben Sie die Lenz'sche Regel an und überprüfen Sie mit ihrer Hilfe das Vorzeichen Ihres Ergebnisses aus (a)!~~

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} B_z h^2 \hat{\varphi} \cos \omega t$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2} \omega B_z h^2 \hat{\varphi} \sin \omega t$$

$$U_{ind}(t) = + \frac{1}{2} \omega B_z h^2 \hat{\varphi} \sin \omega t$$

Name:	Vorname:

Aufgabe 2: Induktion (17 Punkte)

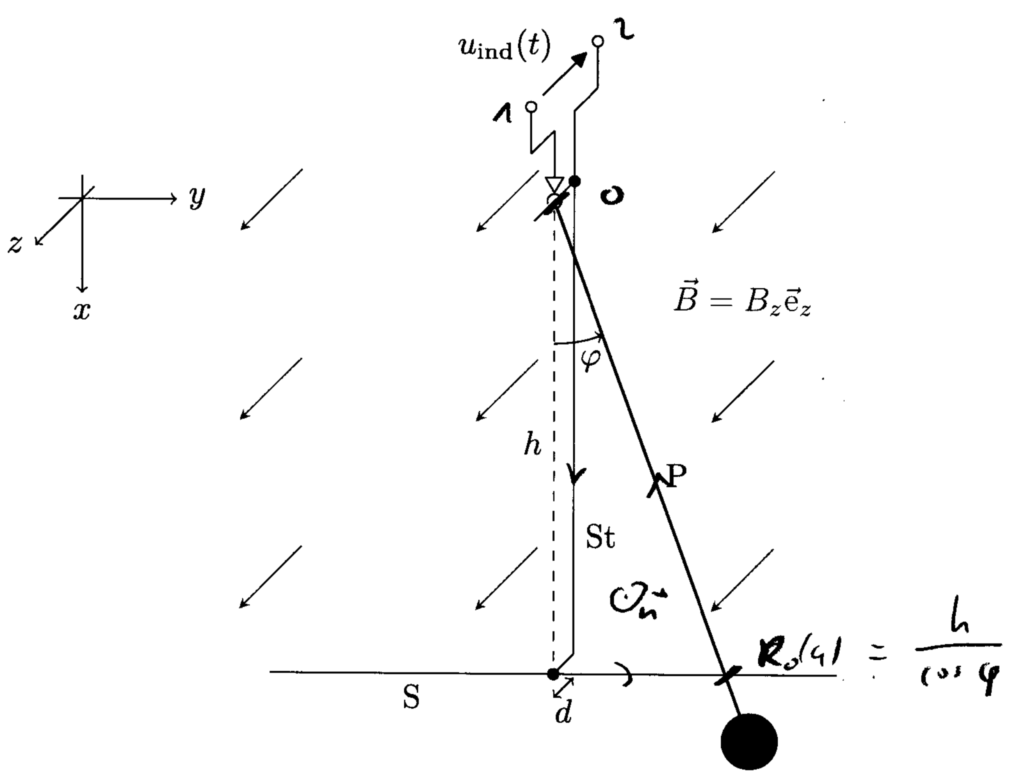
Ein Pendel mit einem leitfähigen Pendelstab P schwingt periodisch hin und her und gleitet dabei reibungsfrei an einer leitfähigen Stromschiene S entlang. Die Pendelbewegung wird durch den Auslenkwinkel $\varphi(t)$ beschrieben:

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\cos(\omega t)$$

(Nehmen Sie $\hat{\varphi}$ als „relativ klein", also $\hat{\varphi} < 30°$, an.)
Der Abstand zwischen Pendelaufhängung und Stromschiene wird mit h bezeichnet. Das Stativ St ist ebenfalls leitfähig und mit der Stromschiene verbunden. Das Pendel selbst ist elektrisch isoliert am Stativkopf aufgehängt. Der Abstand d sei so klein, dass die z-Ausdehnung der Anordnung vernachlässigt werden kann. Der ganze Aufbau ist von dem homogenen, konstanten Magnetfeld

$$\vec{B} = B_z\,\vec{e}_z$$

durchsetzt. Zwischen Pendelaufhängung und Stativkopf wird die induzierte Spannung $u_{\text{ind}}(t)$ gemessen.



(a) Berechnen Sie die Spannung $u_{\text{ind}}(t)$!

Alternativer Weg:
getrennte Betrachtung von Bewegungs- und Ruhe-induktion:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \iint -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{A} = 0 \qquad \vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

offene Klemme $\rightarrow \vec{J} = 0 \rightarrow \vec{F}_L = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B}$ in Leiter

Name:	Vorname:

$q\vec{v}\times\vec{B}$ verschiebt Ladungen im Leiter in Richtung der Klemme → es entsteht entgegengesetztes Potentialfeld E!

$$U_{ind} = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} - \int_{2,\ \text{im Leiter}}^{1} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_2^1 \underbrace{\vec{E}}_{= -\vec{v}\times\vec{B}}\cdot d\vec{s}$$

$$= \int_2^1 \vec{v}\times\vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{R_0(\varphi)}^{0} (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{e}_R\, dR \qquad \vec{B} = B_z\,\vec{e}_z,\quad \vec{v}(R) = \dot{\varphi}\,R\,\vec{e}_\varphi,\quad d\vec{s} = dR\,\vec{e}_R \quad \Big|\quad \vec{e}_\varphi\times\vec{e}_z = \vec{e}_R,\quad \vec{e}_R\cdot\vec{e}_R = 1$$

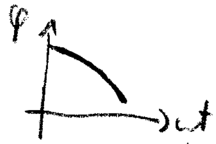
$$= -\int_0^{L/\cos\varphi} B_z\,\dot{\varphi}\,R\,dR$$

$$= \frac{1}{2} L^2 B_z \frac{\omega\hat{\varphi}\sin\omega t}{\cos^2[\hat{\varphi}\cos\omega t]}$$

(b) Geben Sie die Lenz'sche Regel an und überprüfen Sie mit ihrer Hilfe das Vorzeichen Ihres Ergebnisses aus (a)!

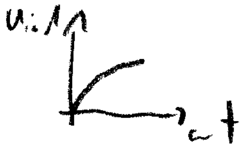
Der induzierte Strom ist so gerichtet, dass er seiner Ursache entgegenwirkt.

Betrachte $0 < \omega t < \frac{\pi}{2}$



Pendel schwingt nach links → Kraft muss nach rechts wirken. $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$

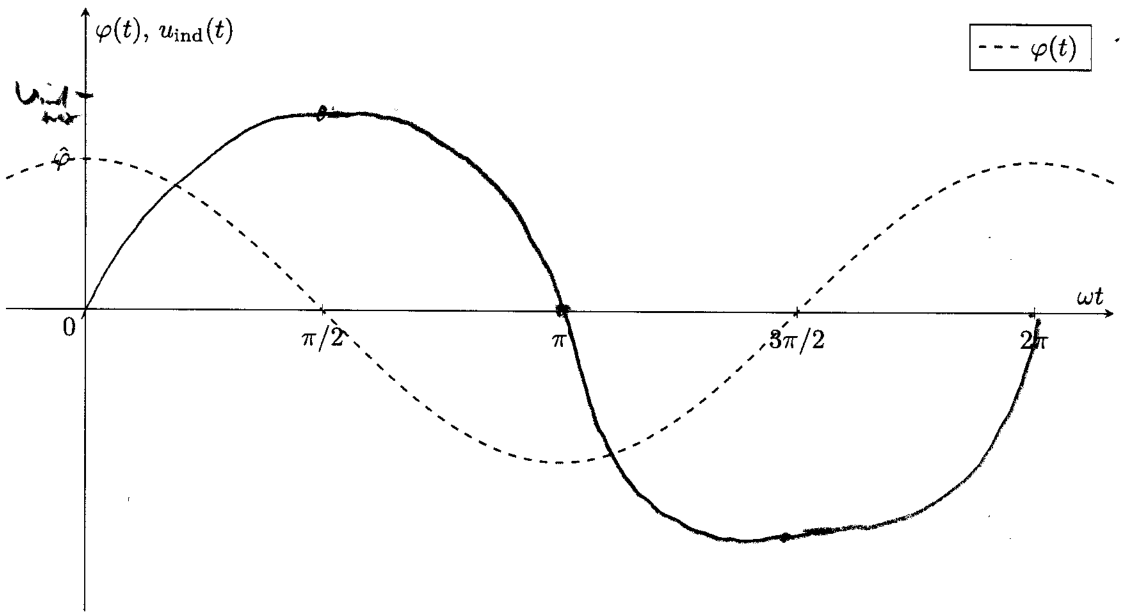
→ rechte Hand: Stromfluss nach oben → $U_{ind} > 0$



passt zur Formel $U_{ind} \sim \frac{\sin\omega t}{\dots}$

Name:	Vorname:

(c) Skizzieren (!) Sie die Zeitfunktion $u_{\text{ind}}(t)$ in dem gegebenen Diagramm! Die Pendelschwingung $\varphi(t)$ ist bereits eingezeichnet.



(d) Nun wird ein Verbraucherwiderstand an die Klemmen angeschlossen. Welche Auswirkung hat dies auf die Pendelbewegung? Begründen Sie!

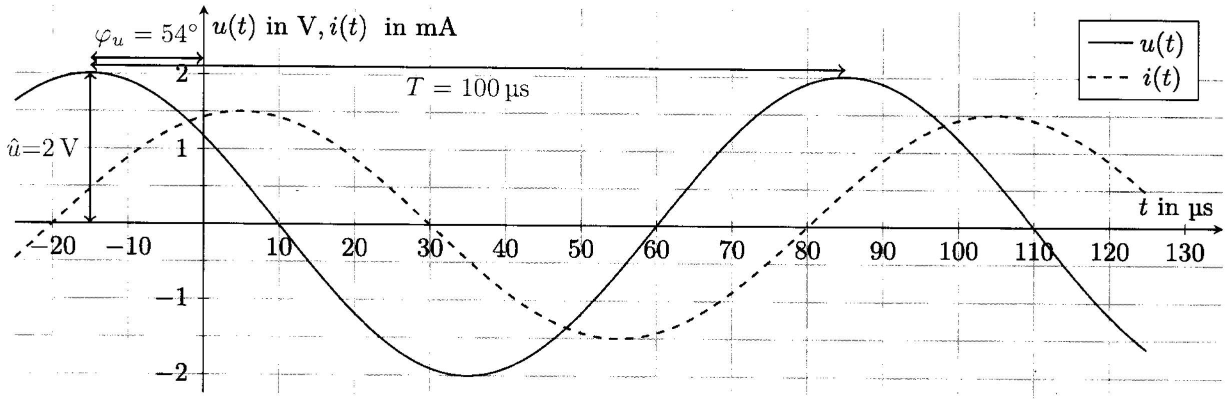
Nach Lenzsche Regel wirkt die fließende Strom der Bewegung entgegen → das Pendel wird gebremst.

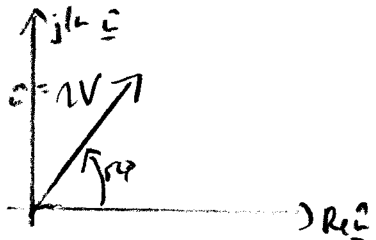
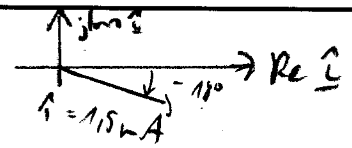
oder: Die im Verbraucher umgesetzte Energie wird dem Pendel entzogen → das Pendel wird gebremst.

Name:	Vorname:

Aufgabe 3: Wechselstromrechnung an einer Impedanz (18 Punkte)

(a) Gegeben sind die unten dargestellten Strom- und Spannungsverläufe an einer Impedanz Z im Zeitbereich. Identifizieren Sie die charakteristischen Parameter dieser sinusförmigen Schwingungen und füllen Sie die darunter angegebene Tabelle mit den verschiedenen Darstellungen aus. Für die Spannungsschwingung $u(t)$ ist die Gleichung im Zeitbereich angegeben und die entsprechenden Parameter sind im Graphen bereits markiert.



	Spannung	Strom
Gleichung im Zeitbereich	$u(t) = 2\,\mathrm{V}\cos(2\pi\,10\,\mathrm{kHz}\,t + 54°)$	$i(t) = 1{,}5\,\mathrm{mA} \cdot \cos(2\pi\,10\,\mathrm{kHz}\,t - 18°)$
Kreisfrequenz ω	$\omega = 2\pi\,10\,\mathrm{kHz}$	$\omega = 2\pi\,10\,\mathrm{kHz}$
Zeigerdarstellung – Spitzenwertzeiger (Skizze zeichnen!)		
Komplexe Amplitude (Phasor): Real- und Imaginärteil (Spitzenwerte)	$\hat{u} = 1{,}18\,\mathrm{V} + j\,1{,}62\,\mathrm{V}$	$\hat{i} = 1{,}43\,\mathrm{mA} - j\,0{,}463\,\mathrm{mA}$

Name:	Vorname:

(b) Bestimmen Sie die an der Impedanz Z im zeitlichen Mittel umgesetzte Wirkleistung $\bar{P}$ sowie die Scheinleistung S und die Blindleistung Q. Geben Sie den Leistungsfaktor λ an.

kompl. Leistung $\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = \frac{1}{2}\,\hat{\underline{u}}\,\hat{\underline{I}}^*$

$= 467\,\mu W + j\,1{,}47\,\mathrm{mvar}$

Schein Leistung

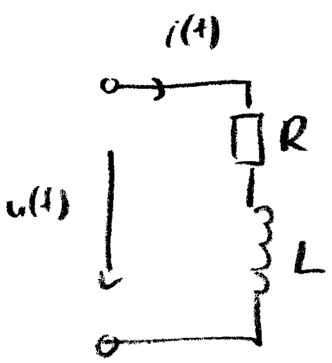
$S = |\underline{S}| = 1{,}54\,\mathrm{mVA}$ $\qquad = P + j\,Q$

$$\lambda = \frac{P}{|\underline{S}|} = \cos\varphi_{\underline{z}} = 0{,}309$$

(c) Berechnen Sie die komplexe Impedanz Z!

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = 411\,\Omega + j\,1{,}17\,k\Omega$$

(d) Zeichnen und dimensionieren Sie ein Netzwerk aus einer beliebigen Anzahl an Widerständen (R), Spulen (L) und Kondensatoren (C), bezüglich dessen Klemmen sich bei Anlegen der Spannung $u(t)$ die gezeigten Verläufe für $u(t)$ und $i(t)$ ergeben!



$\underline{Z} = R + jX \qquad X = \omega L$

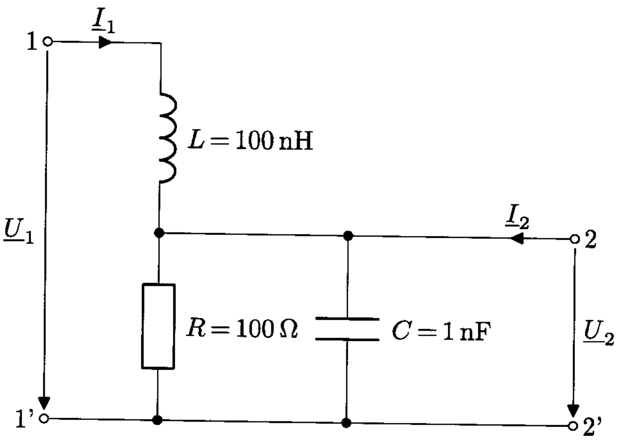
$R = 411\,\Omega$

$L = \frac{X}{\omega} = 20\,\mathrm{mH}$

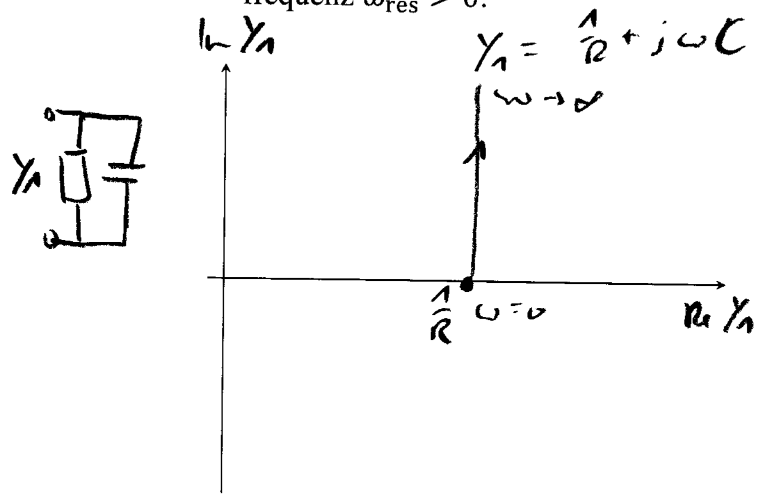
Name:	Vorname:

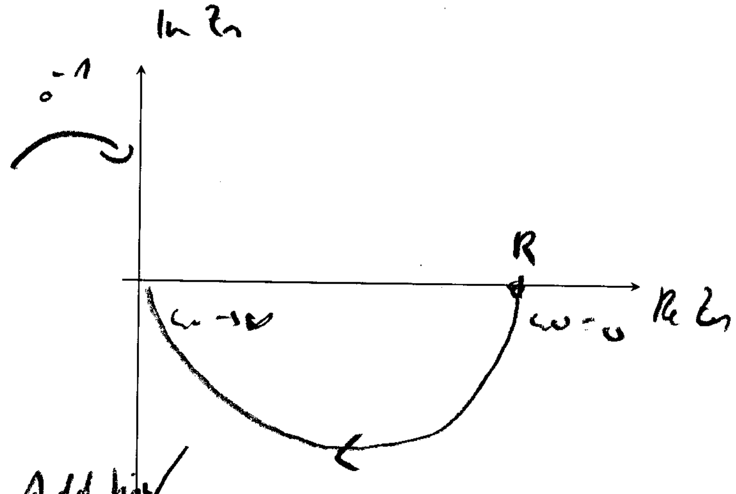
Aufgabe 4: Ortskurve und Übertragungsfunktion (21 Punkte)

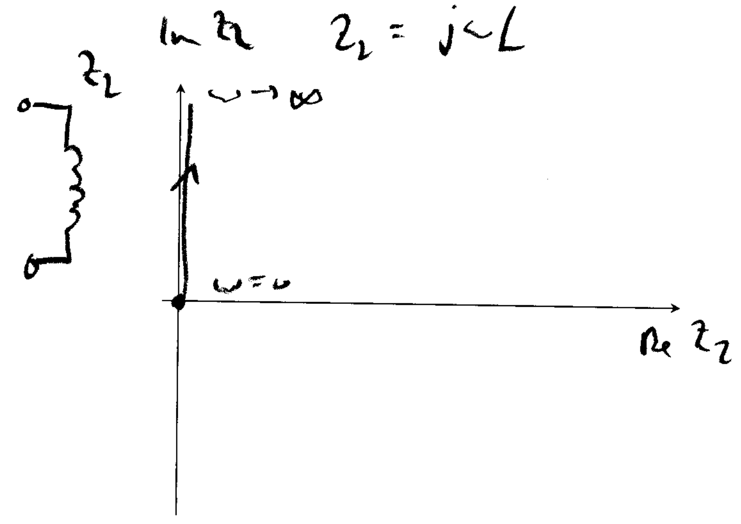
Es wird die abgebildete Filterschaltung betrachtet.

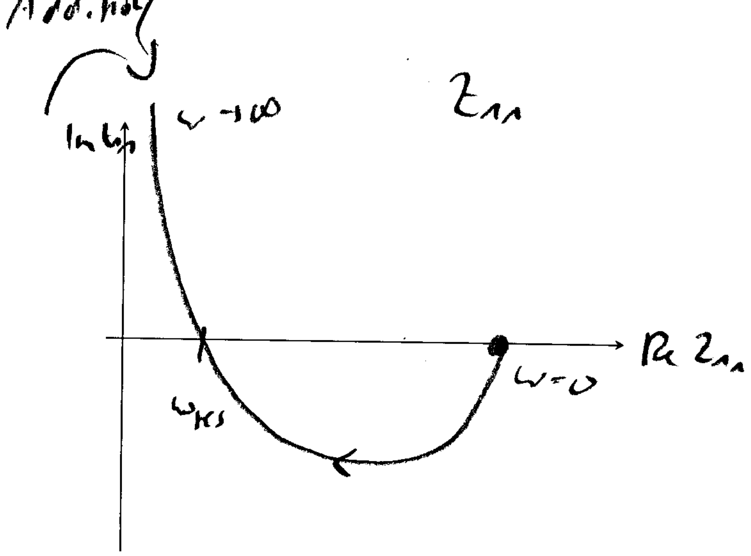


(a) Konstruieren/Skizzieren Sie schrittweise die Gesamtimpedanzortskurve bezüglich der Klemmen 1–1' (Leerlauf an den Klemmen 2–2'). Nutzen Sie hierfür die vorgegebenen Diagramme. Denken Sie an Achsenbeschriftungen und markieren Sie die charakteristischen Punkte $\omega = 0$, $\omega \to \infty$ und gegebenenfalls die Resonanzfrequenz ω_{res}!
Hinweis: Für die gegebenen Zahlenwerte existiert für die Gesamtimpedanz eine Resonanzfrequenz $\omega_{\text{res}} > 0$.









Name:	Vorname:

(b) Geben Sie die komplexe Eingangsimpedanz Z_{11} bezüglich der Klemmen 1–1' an (Leerlauf an den Klemmen 2–2') und berechnen Sie die Resonanzfrequenz ω_{res}.
(Hinweis: Im Resonanzfall gilt: $\text{Im}\{Z_{11}(\omega_{\text{res}})\} = 0$)

$$Z_{11} = j\omega L + \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{\frac{R}{j\omega C}\left(R - \frac{1}{j\omega C}\right)}{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$$

$$\text{Im}\, Z_{11} = \omega L - \frac{R^2}{\omega C R^2 + \frac{1}{\omega C}} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega^2 LCR^2 + \frac{L}{C} = R^2 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{res} = \pm \sqrt{\frac{R^2 - \frac{L}{C}}{LCR^2}}$$

$$\omega_{res} = 99{,}5 \cdot 10^6 \, \frac{1}{s}$$

(c) Welches Verhalten weist die Eingangsimpedanz für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ auf?

$$\omega \to 0 \quad \Rightarrow \quad |Z_{11}| \to R$$

$$\omega \to \infty \quad \Rightarrow \quad |Z_{11}| \to \infty$$

Name:	Vorname:

Nun wird das Netzwerk als Filterschaltung mit den Eingangsklemmen 1–1‘ und den Ausgangsklemmen 2–2’ betrachtet.

(d) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $T(\omega) = \frac{\underline{U}_2(\omega)}{\underline{U}_1(\omega)}$ und bringen Sie diese in die Form

$$T(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathrm{j}\beta\omega}.$$

Geben Sie ω_0 und β als Zahlenwerte an!

$$T(\omega) = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega L\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)}$$

$$= \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega\frac{L}{R}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\frac{1}{\sqrt{LC}}}\right)^2 + j\frac{L}{R}\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 100 \cdot 10^6\ \frac{1}{s}$$

$$\beta = \frac{L}{R} = 1 \cdot 10^{-9}\ s$$

(e) Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_2$ für $\underline{U}_1 = 1$ V bei der Frequenz $\omega = \omega_0$!
(Wenn Sie in (d) keine Werte für ω_0 und β bestimmen konnten, verwenden Sie bitte $\omega_0 = 142 \times 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$ und $\beta = 3.7$ ns.)

$$\underline{U}_2 = T(\omega)\, \underline{U}_1 \qquad T(\omega = \omega_0) = \frac{1}{1 - 1 + j\beta\omega_0} = -10j$$

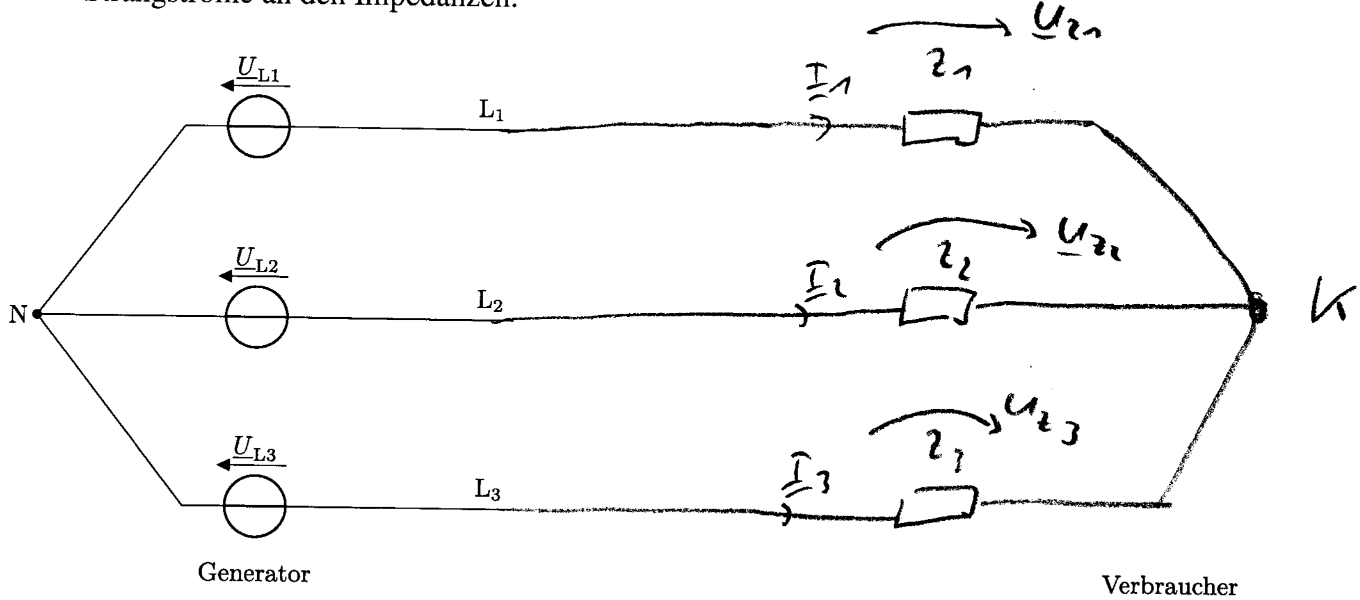
$$\Rightarrow \quad \underline{U}_2 = -j10\,V$$

Name:	Vorname:

Aufgabe 5: Drehstrom (17 Punkte)

An einem 400-V-Drehstromnetz mit drei Leitern sollen die drei Verbraucher $\underline{Z}_1 = 100\,\Omega$, $\underline{Z}_2 = 220\,\Omega\,\angle{-10°}$, $\underline{Z}_3 = 330\,\Omega + \mathrm{j}280\,\Omega$ in Sternschaltung ohne Sternpunktleiter angeschlossen werden.

(a) Ergänzen Sie die Schaltung entsprechend und bezeichnen Sie Strangspannungen und Strangströme an den Impedanzen.



(b) Geben Sie die Phasoren (als Effektivwerte) $\underline{U}_{L1}$, $\underline{U}_{L2}$ und $\underline{U}_{L3}$ der Strangspannungen des Generators des symmetrischen 400-V-Drehstromsystems an.

$$\underline{U}_{L1} = 230\,V$$

$$\underline{U}_{L2} = 230\,V\,e^{-j120°} = 230\,V \angle{-120°}$$

$$\underline{U}_{L3} = 230\,V\,e^{j120°} = 230\,V \angle{120°}$$

(c) Berechnen Sie die Strangspannungen und Strangströme an den Impedanzen.

Ansatz: $\underline{U}_{KN}$, dann Maschenregel

$$\underline{U}_{KN} = \frac{\frac{\underline{U}_{L1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{L2}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_{L3}}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = 126\,V - j22{,}8\,V$$

Name:	Vorname:

$\underline{U}_{Z1} = \underline{U}_{L1} - \underline{U}_{KN} = 104\,V + j\,22{,}8\,V$

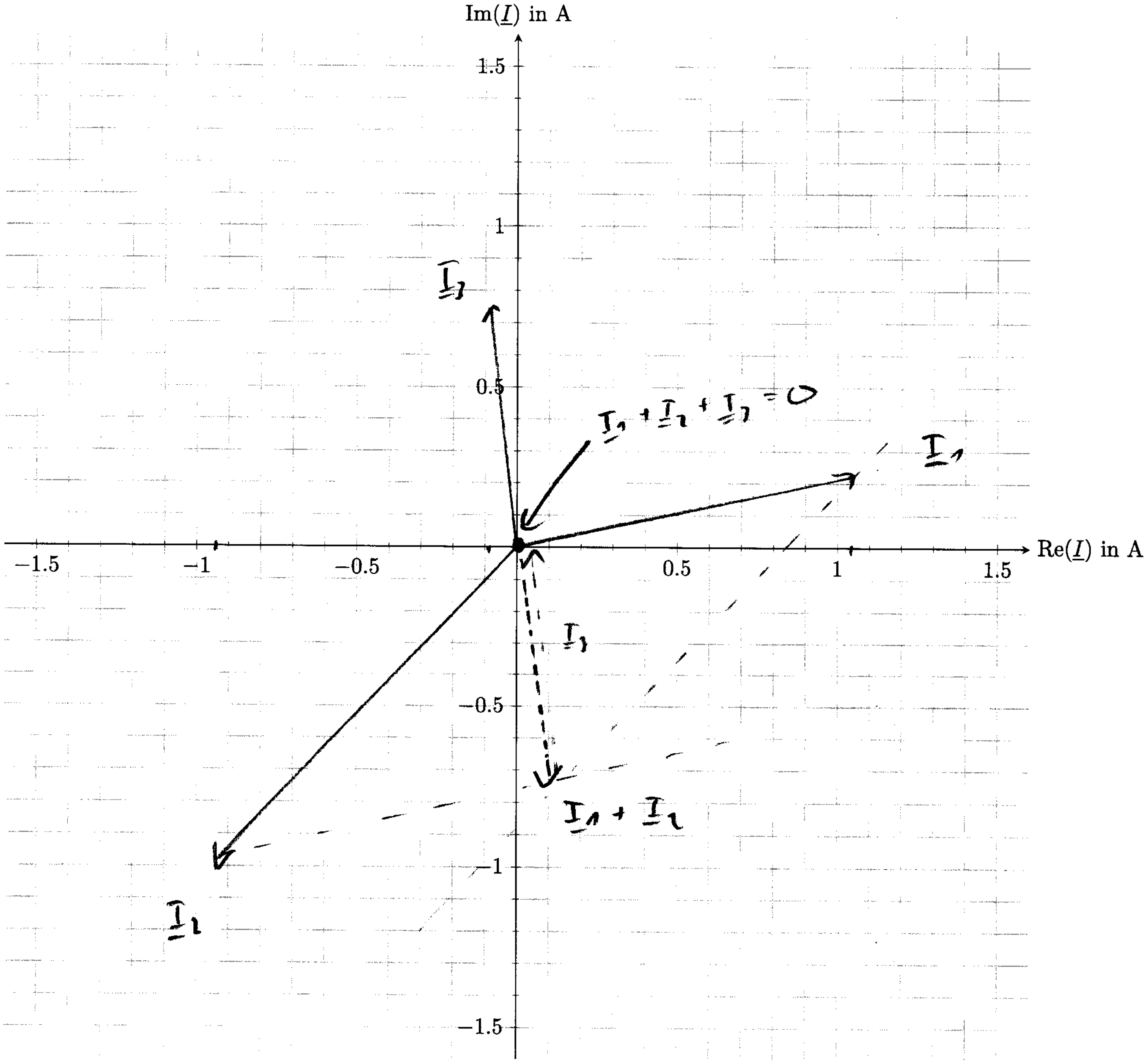
$\underline{U}_{Z2} = \underline{U}_{L2} - \underline{U}_{KN} = -241\,V - j\,176\,V$

$\underline{U}_{Z3} = \underline{U}_{L3} - \underline{U}_{KN} = -241\,V + j\,222\,V$

$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{Z1}}{\underline{Z}_1} = 1{,}64\,A + j\,0{,}238\,A \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{Z2}}{\underline{Z}_2} = -0{,}942\,A - j\,0{,}980\,A$

$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{Z3}}{\underline{Z}_3} = -0{,}0936\,A + j\,0{,}752\,A$

(d) Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm der Ströme durch die Lastimpedanzen. Zeigen Sie graphisch/geometrisch, dass der Knotensatz $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ erfüllt ist!



Name:	Vorname:

Aufgabe 6: Messtechnik (9 Punkte)

In einem optischen Messaufbau wird mit einer Photodiode ein Lichtsignal gemessen. Das Signal der Photodiode (der Photostrom I) muss kräftig verstärkt werden, wobei dem Signal zufällige Messfehler (Rauschen) hinzugefügt werden. Der zusätzliche Messfehler im Messgerät selbst soll vernachlässigt werden.
Es werden für zwei Zustände des Messaufbaus je vier Einzelmessungen durchgeführt:

Messung Zustand 1

#	I (in nA)
1	1.45
2	1.41
3	1.54
4	1.45

Messung Zustand 2

#	I (in nA)
1	1.63
2	1.77
3	1.78
4	1.75

(a) Berechnen Sie jeweils den Mittelwert $\tilde{I}$ als Schätzung des wahren Wertes!

$$\tilde{I}_1 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} I_{1,i} = 1{,}46\,nA$$

$$\tilde{I}_2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} I_{2,i} = 1{,}73\,nA$$

(b) Geben Sie die Formel zur Berechnung der Schwankung s_I der Einzelmesswerte an und berechnen Sie für beide Zustände jeweils die Schwankung!

$$s_I = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(I_i - \tilde{I})^2}$$

$s_{I,1} = 0{,}055\,nA$ $\qquad$ $s_{I,2} = 0{,}069\,nA$

Name:	Vorname:

(c) Berechnen Sie jeweils die Schwankung $s_{\bar{I}}$ des Mittelwerts!
(Wenn Sie in (b) kein Ergebnis berechnen konnten, verwenden Sie bitte:
$s_{I,1} = 0.04$ nA und $s_{I,2} = 0.06$ nA.)

$$s_{\tilde{I}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_I$$

$s_{\tilde{I},1} = 0{,}028$ nA $\quad s_{\tilde{I},2} = 0{,}035$ nA

(d) Geben Sie für beide Messungen das Messergebnis in der Form Schätzwert ± Vertrauensgrenzen für eine statistische Sicherheit von 95 % an! Lässt sich anhand der Messwerte mit 95%iger Sicherheit sagen, dass sich das Messsystem tatsächlich in zwei unterschiedlichen Zuständen befunden hat? $n = 4, \quad P = 0{,}95 \Rightarrow t = 3{,}18$

$$I = \tilde{I} + t\, s_{\tilde{I}}$$

$$I_1 = 1{,}46 \text{ nA} \pm 0{,}087 \text{ nA}$$
$$I_2 = 1{,}7 \text{ nA} \pm 0{,}11 \text{ nA}$$

Beide Zustände sind mit 95% Sicherheit unterscheidbar, da $1{,}46$ nA $+ 0{,}087$ nA $< 1{,}7$ nA $- 0{,}11$ nA.

Tabelle: Abhängigkeit des Vertrauensfaktors t von der Anzahl der Messungen N bei verschiedener statistischer Sicherheit P

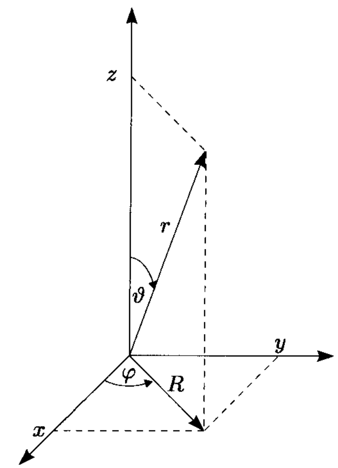
N	$P = 68.3\,\%$ t	$P = 95\,\%$ t	$P = 99\,\%$ t	$P = 99.73\,\%$ t
2	1.84	12.7	63.7	236
3	1.32	4.30	9.92	19.2
4	1.20	3.18	5.84	9.22
6	1.11	2.57	4.03	5.51
10	1.06	2.26	3.25	4.09
20	1.03	2.09	2.86	3.45
50	1.01	2.01	2.68	3.16
100	1.01	1.98	2.63	3.08
200	1.00	1.97	2.60	3.04
> 200	1.00	1.96	2.58	3.00

Nach Lerch: Elektrische Messtechnik, Springer 2012

Name: | Vorname:

Der Zusammenhang zwischen kartesischen, Kreiszylinder- und Kugelkoordinaten

Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
x	$R\cos\varphi$	$r\sin\vartheta\cos\varphi$
y	$R\sin\varphi$	$r\sin\vartheta\sin\varphi$
z	z	$r\cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2}$	R	$r\sin\vartheta$
$\arctan\frac{y}{x}$	φ	φ
z	z	$r\cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\sqrt{R^2+z^2}$	r
$\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$	$\arctan\frac{R}{z}$	ϑ
$\arctan\frac{y}{x}$	φ	φ



Linien-, Flächen- und Volumenelemente in den verschiedenen Koordinatensystemen

	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
$d\vec{s}$	$\vec{e}_x\,dx+\vec{e}_y\,dy+\vec{e}_z\,dz$	$\vec{e}_R\,dR+\vec{e}_\varphi\,Rd\varphi+\vec{e}_z\,dz$	$\vec{e}_r\,dr+\vec{e}_\vartheta\,rd\vartheta+\vec{e}_\varphi\,r\sin\vartheta\,d\varphi$
$d\vec{f}$	$\vec{e}_x\,df_x+\vec{e}_y\,df_y+\vec{e}_z\,df_z$ $df_x = dy\,dz$ $df_y = dx\,dz$ $df_z = dx\,dy$	$\vec{e}_R\,df_R+\vec{e}_\varphi\,df_\varphi+\vec{e}_z\,df_z$ $df_R = R\,d\varphi\,dz$ $df_\varphi = dR\,dz$ $df_z = R\,dR\,d\varphi$	$\vec{e}_r\,df_r+\vec{e}_\vartheta\,df_\vartheta+\vec{e}_\varphi\,df_\varphi$ $df_r = r^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$ $df_\vartheta = r\sin\vartheta\,dr\,d\varphi$ $df_\varphi = r\,dr\,d\vartheta$
dv	$dx\,dy\,dz$	$R\,dR\,d\varphi\,dz$	$r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$
grad Φ	$\vec{e}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}$	$\vec{e}_R\frac{\partial\Phi}{\partial R}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}+\vec{e}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}$	$\vec{e}_r\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$